

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2416529

# 基于步长上界原理的变步长 FXLMS 算法研究

谢炎江<sup>1,2</sup> 原霞<sup>1</sup> 刘锋<sup>2</sup> 王玉帅<sup>3</sup> 樊文欣<sup>1</sup>

(1. 中北大学机械工程学院 太原 030051; 2. 北京东方振动和噪声技术研究所 北京 100085;

3. 中北大学机电工程学院 太原 030051)

**摘要:** 针对次级通道突变对算法收敛速度和系统稳定性的潜在影响, 本文提出一种自适应变步长 FXLMS 算法。首先推导步长上界公式, 基于最优收敛步长与步长上界关系, 确立最优收敛步长的关键参数。通过计算次级通道突变前后最优收敛步长比, 实现步长自适应调整。其次, 使次级通道发生不同程度突变, 以比较本研究算法、经典 FXLMS 算法以及各类变步长算法在收敛速度与稳态误差方面的性能表现, 发现新算法均在迭代 200 次后收敛, 均方误差保持在 -85 dB 附近, 优于经典 FXLMS 和其他变步长算法。最后用真实测量的次级通道数据分析新算法和经典 FXLMS 算法的控制效果。结果表明, 在次级通道发生突变后, 新算法在 5 s 后均方误差稳定在 -47 dB, 而经典 FXLMS 算法会使系统不稳定。证明新算法能很好兼顾收敛速度和稳态误差, 并且具有良好的自适应性。

**关键词:** 收敛速度; 变步长; 步长上界比值; 主动控制; 自适应性

**中图分类号:** TB535; TN911.4 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 610.3035

## Research on variable step size FXLMS algorithm based on step size upper limit ratio method

Xie Yanjiang<sup>1,2</sup> Yuan Xia<sup>1</sup> Liu Feng<sup>2</sup> Wang Yushuai<sup>3</sup> Fan Wenxin<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. China Orient Institute of Noise and Vibration, Beijing 100085, China;

3. School of Mechatronic Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** In view of the potential impact of secondary path mutation on the convergence speed and system stability of the algorithm, an adaptive variable step size FXLMS algorithm is proposed. Firstly, the formula of the upper bound of the step size is derived, and the key parameters are established based on the relationship between the optimal convergence step size and the upper bound of the step size. By comparing the optimal step size ratio before and after the mutation of the secondary path, the adaptive adjustment of the step size was realized. Secondly, in order to compare the performance of the proposed algorithm, the classical FXLMS algorithm and various variable step size algorithms in terms of convergence speed and steady-state error, it is found that the new algorithm converges after 200 iterations, and the mean square error remains around -85 dB, which is better than the classical FXLMS and other variable step size algorithms. Finally, the control effect of the new algorithm and the classical FXLMS algorithm is analyzed by using the secondary path data of real measurements. The results show that after the mutation of the secondary path, the mean square error of the new algorithm is stable at -47 dB after 5 s, while the classical FXLMS algorithm will make the system unstable. It is proved that the new algorithm can take into account the convergence speed and steady-state error well, and has good adaptability.

**Keywords:** convergence speed; variable step size; stability ratio; active control; adaptability

## 0 引言

在有源噪声控制中, 基于最速下降算法的最小均方 (least mean square, LMS) 算法因易于实现和较低的成本

本受到广泛应用<sup>[1-2]</sup>, 其中包括噪声主动控制<sup>[3-5]</sup>、图像去噪和图像复原、系统辨识和自适应控制<sup>[6]</sup>等不同场景, 但由于未考虑次级通道的影响, LMS 算法逐渐被滤波-x 最小均方 (filtered-x least mean square, FXLMS) 算法所替代<sup>[7-9]</sup>。

针对 FXLMS 算法研究内容比较丰富,包括离线辨识和在线辨识的研究<sup>[10-11]</sup>、算法稳定边界的探讨<sup>[12-13]</sup>、变步长 FXLMS 算法研究<sup>[14]</sup>方面。在传统的 FXLMS 算法中,固定步长算法可能导致收敛速度缓慢或稳态误差过大<sup>[15]</sup>。尤其在次级通道发生变化时,收敛速度会发生变化,收敛速度过快,系统稳态误差得不到保障,收敛速度过慢则会使收敛时间变长<sup>[16]</sup>,因此变步长 FXLMS 算法有很好的研究价值。针对变步长问题,王平等<sup>[17]</sup>提出了基于正态分布的分段式变步长自适应滤波算法,当误差信号大于某个特定值时采用正态分布函数实现变步长,反之则使用固定步长。火元莲等<sup>[18]</sup>提出了反双曲正切函数的变步长 LMS,讨论函数中不同参数对算法性能的影响。明乐等<sup>[19]</sup>提出了对数函数归一化变步长 LMS 算法。利用步长和误差信号间对数关系来实现变步长。朱晓锦等<sup>[20]</sup>提出了反余切变步长 FXLMS,并将该算法用于压电柔性悬臂梁振动控制。综上所述,变步长过程主要利用一些函数基本特性来实现变步长,均实现了良好的控制效果,但是这些变步长算法需要针对不同噪声信号,手动调节函数参数来实现变步长。

本文首先分析 FXLMS 算法步长上界,利用步长上界与最优收敛步长的关系,推导出最优步长公式并实现了变步长算法的设计,在仿真测试中,使次级通道突变,对比本文算法、经典 FXLMS 算法以及其他变步长算法的收敛情况和稳态误差。为确定新算法的实用性,将新算法和经典 FXLMS 运用于真实突变的次级通道下,比较两种算法的控制效果。

### 1 经典 FXLMS 算法

在传统的 FXLMS 算法中,系统框图如图 1 所示,  $x(n)$  为参考信号,  $P(z)$  为初级通道,  $d(n)$  为参考信号经过初级路径产生的初级噪声,  $W(z)$  表示自适应控制滤波器,  $S(z)$  表示次级通道,  $\hat{S}(z)$  为次级通道的估计,  $y(n)$  为经过自适应滤波器  $W(z)$  的输出信号。

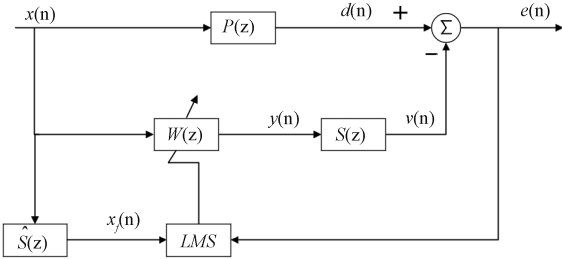


图 1 FXLMS 系统框图

Fig.1 Block diagram of the FXLMS system

整个控制系统中,通常用 FIR 滤波器来表示  $W(z)$  和  $\hat{S}(z)$ , 给定 FIR 滤波器长度  $L$ , 定义  $w(n)$  和  $\hat{s}(n)$  分别为  $W(z)$  和  $\hat{S}(z)$  滤波器系数,可表示为:

$$w(n) = [\omega_0(n), \omega_1(n), \dots, \omega_{L-1}(n)]^T \quad (1)$$

$$\hat{s}(n) = [\hat{s}_0(n), \hat{s}_1(n), \dots, \hat{s}_{L-1}(n)]^T \quad (2)$$

从图 1 可看出,  $y(n)$  为次级信号,参考信号  $x(n)$  经过整个系统产生的残余噪声信号  $e(n)$  可表示为:

$$e(n) = d(n) - v(n) = d(n) - y(n)^T s(n) \quad (3)$$

$$y(n) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-L+1)]^T \quad (4)$$

在整个控制过程中,残余噪声的均方误差(MSE)为:

$$J(n) = E\{e^2(n)\} \quad (5)$$

使均方误差最小,可得到最优  $w_o(n)$

$$w_o(n) = R^{-1}Q \quad (6)$$

其中,  $R^{-1}$  为  $x_f(n)$  的自相关矩阵,  $Q$  为  $x_f(n)$  和  $d(n)$  的互相关向量,自适应过程是利用  $w(n)$  迭代使  $J(n)$  最小,  $w(n)$  更新过程表示为:

$$w(n+1) = w(n) + \mu e(n) x_f(n) \quad (7)$$

$$x_f(n) = [x_f(n), x_f(n-1), \dots, x_f(n-L+1)]^T \quad (8)$$

其中,  $x_f(n)$  为经过  $\hat{S}(z)$  的输出信号,  $\mu$  为收敛步长因子。

### 2 新 VSSFXLMS 算法

#### 2.1 稳定步长上界分析

本文提出的变步长滤波-x 最小均方算法(variable step-size filtered-x least mean square, VSSFXLMS)的核心思想是围绕收敛步长上界进行分析,根据步长上界确定最优收敛步长,加快收敛速度。通过步长上界公式确定影响收敛速度的参数,并将次级通道突变时参数变化转化为步长上界比值  $\eta$ , 同时把  $\eta$  设计到新 VSSFXLMS 算法中,来保证收敛步长接近最优解。

步长因子  $\mu$  决定了算法的收敛速度与稳态性能。设收敛速度为  $\omega$ , 可表示为:

$$\omega = 2\mu\delta_x^2 \left(1 - \frac{\mu}{\mu_{\max}}\right) \quad (9)$$

其中,  $\mu_{\max}$  表示步长上界,  $\delta_x^2$  表示参考信号的功率,若使  $\omega$  最大,则取  $\mu$  为  $\frac{\mu_{\max}}{2}$ ,  $\mu_{\max}$  表达式为:

$$\mu_{\max} = \frac{2s(n)^T \hat{s}(n)}{\delta_x^2 \|s(n)\|^2 \|\hat{s}(n)\|^2 (L + 2\Delta_{id})} \quad (10)$$

其中,  $s(n)$  为次级通道的脉冲响应函数,  $\|s(n)\|$  表示次级通道  $s(n)$  的二范数,  $\|\hat{s}(n)\|$  表示次级通道  $\hat{s}(n)$  的二范数,  $L$  为滤波器长度,  $\Delta_{id}$  为次级通道的等效延迟。在实际系统中次级通道不能进行测量,假设  $s(n)$  和  $\hat{s}(n)$  长度相等。若离线辨识准确,则可以用次级通道估计  $\hat{s}(n)$  来近似代替  $s(n)$ , 将状态下的  $\mu_{\max}$  表示为  $\mu'_{\max}$ , 则  $\mu'_{\max}$  可表示为:

$$\mu'_{\max} = \frac{2}{\delta_x^2 \|\hat{s}(n)\|^2 (L + 2\Delta'_{id})} \quad (11)$$

在离线辨识不准确或是次级通道发生变化时,则  $\mu_{\max}$  会发生变化,为研究  $\mu_{\max}$  对系统稳态性影响,引入  $\eta$  作为步长上界比值,可表示为:

$$\eta = \frac{\mu'_{\max}}{\mu_{\max}} \quad (12)$$

将式(10)和(11)带入式(12),可得:

$$\eta = \frac{s(n)^T \hat{s}(n)}{\|s(n)\|^2} \left( \frac{L + 2\Delta'_{id}}{L + 2\Delta_{id}} \right) \quad (13)$$

在实际过程当中,  $L \gg \Delta_{id}$ , 则  $\eta$  可近似的表示为:

$$\eta = \frac{s(n)^T \hat{s}(n)}{\|s(n)\|^2} \quad (14)$$

### 2.2 新 VSSFXLMS 算法设计

通过上一小节对步长上界  $\mu_{\max}$  分析,发现影响  $\mu_{\max}$  的因素有滤波器长度、参考信号、次级通道、估计次级通道以及时延。在次级通道发生改变时,除了  $s(n)$  发生改变外,其余影响因素变化可忽略,因此测得变化后  $s(n)$  非常关键。通过对初级通道  $P(z)$  进行估计得到  $\hat{P}(z)$ ,  $x(n)$  经过  $\hat{P}(z)$  得到  $\hat{d}(n)$ , 在实际系统中,  $s(n)$  不可测,定义参数  $y'(n)$ , 使  $y'(n)$  为:

$$y'(n) = e(n) - \hat{d}(n) \quad (15)$$

若  $\hat{P}(z) \approx P(z)$ , 可通过  $y'(n)$  间接得到  $s(n)$ , 则  $y'(n)$  可表示为:

$$y'(n) \approx v(n) \approx \mathbf{y}(n)^T \mathbf{s}(n) \quad (16)$$

在  $k$  时刻,取  $k$  至前  $k - L$  时刻中  $y'(n)$  构成向量  $\mathbf{Y}'(n)$ , 表达形式为:

$$\mathbf{Y}'(n) = [y'(k), y'(k-1), \dots, y'(k-L+1)]^T \quad (17)$$

在  $k$  时刻,取  $k$  至前  $k - L$  时刻中  $\mathbf{y}(n)^T$  构成矩阵  $\mathbf{Y}(n)$ , 表达形式为:

$$\mathbf{Y}(n) = \begin{bmatrix} y(k) & y(k-1) & \dots & y(k-L+1) \\ y(k-1) & y(k-2) & \dots & y(k-L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k-L+1) & y(k-L) & \dots & y(k-2L+1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\mathbf{Y}'(n)$ ,  $\mathbf{Y}(n)$  和  $s(n)$  三者关系可表示为:

$$\mathbf{Y}'(n) = \mathbf{Y}(n) \mathbf{s}(n) \quad (19)$$

式(19)等式两边同时乘  $\mathbf{Y}^{-1}(n)$ , 得到式(20):

$$\mathbf{s}(n) = \mathbf{Y}(n)^{-1} \mathbf{Y}'(n) \quad (20)$$

将求得的  $s(n)$  带入式(14),得到步长上界比值  $\eta$  为:

$$\eta = \frac{(\mathbf{Y}(n)^{-1} \mathbf{Y}'(n))^T \hat{s}(n)}{\|\mathbf{Y}(n)^{-1} \mathbf{Y}'(n)\|^2} \quad (21)$$

为保证系统收敛速度和稳定性,则  $w(n)$  最终更新过程可表示为:

$$w(n+1) = w(n) + \eta \mu e(n) \mathbf{x}_f(n) \quad (22)$$

通过上述公式设计出新 VSSFXLMS 算法,系统框图

如图 2 所示,其中,  $M$  为确定步长上界比值  $\eta$  的子系统,在次级通道发生突变后,子系统  $M$  通过输出  $\eta$  实现变步长。

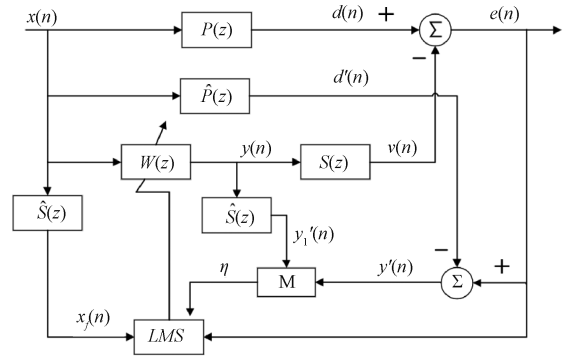


图 2 新 VSSFXLMS 算法系统框图

Fig. 2 Block diagram of the new VSSFXLMS algorithm

本文算法的关键在于确定步长上界比值  $\eta$ , 图 3 给出了子系统  $M$  确定步长上界比值  $\eta$  的过程,  $\eta = 1$  为次级通道未发生突变,  $\eta \neq 1$  代表次级通道发生突变,如流程图所描述的过程,通过调整步长,保持系统以较快收敛速度收敛。

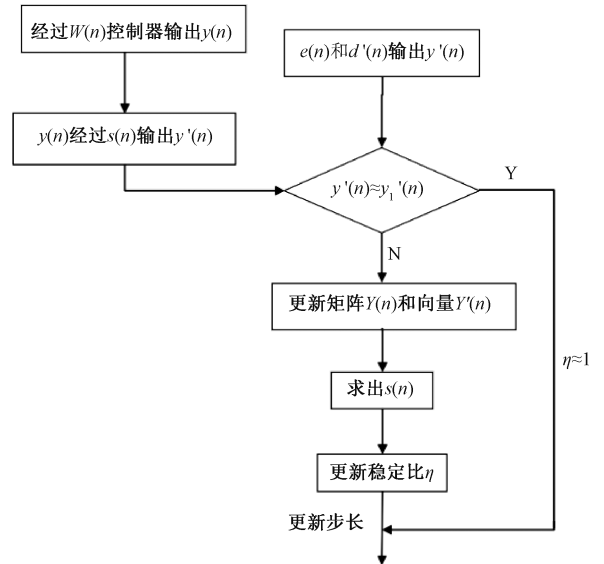


图 3 步长上界比值确定过程

Fig. 3 The process of determining the ratio of the upper bound of the step size

### 3 算法性能分析

#### 3.1 新 VSSFXLMS 算法与经典 FXLMS 算法对比

为验证本文算法在次级通道发生突变时的鲁棒性,改变次级通道的幅值和相位,比较新 VSSFXLMS 算法和经典 FXLMS 的收敛速度和稳态误差,初始阶段使  $\hat{s}(n) = s(n)$ , 假设干扰信号频率为 0.25 Hz, 幅值为 2 的正弦信号,利用经典 FXLMS 算法和本文算法对不同次级通道下

进行主动振动控制测试,取  $\mu = 0.001$ ,次级通道如图 4 所示,用长度为 32 阶的 FIR 滤波器表示。

首先研究次级通道  $s(n)$  幅值变化下主动控制效果,  $\hat{s}(n)$  保持不变,令  $s(n)$  幅值为  $0.5 \hat{s}(n)$ 、 $0.75 \hat{s}(n)$ 、 $1.25 \hat{s}(n)$ 、 $1.5 \hat{s}(n)$ 。在该变化下两种算法的控制效果如图 5(a)~(d)所示,发现幅值变小后,该状态下步长上界变大,新算法的步长由于  $\eta$  调整也变大,收敛速度基本保持不变。而经典 FXLMS 算法中固定步长会使收敛速度变慢。当幅值变大后,由于步长上界变小,经典 FXLMS 算法步长未变,收敛速度过快导致算法稳定误差会变大。

从图 6(a)~(d)中可看出,次级通道相位差变化后,步长上界变大,因此经典 FXLMS 算法收敛速度变慢,而新算法通过调整步长上界比值  $\eta$ ,维持了相位差变化前后收敛

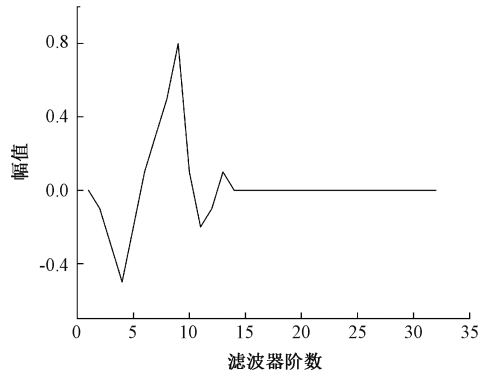


图 4 初始阶段下次级通道脉冲响应  
Fig. 4 The impulse response of the next secondary path in the initial stage

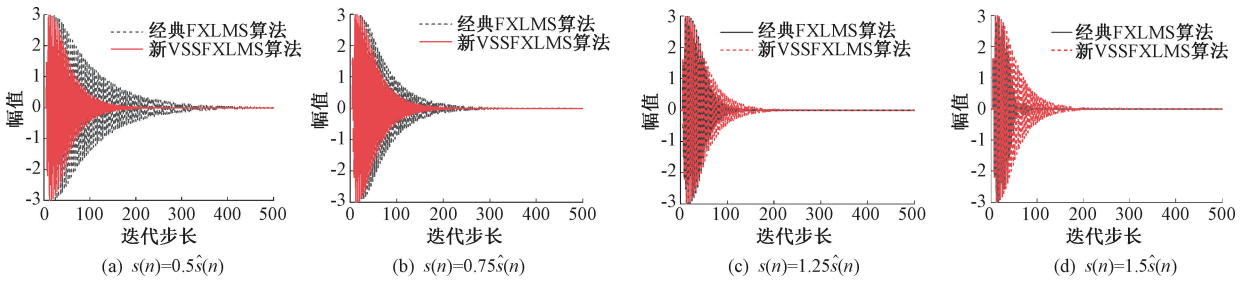


图 5 次级通道幅值变化下控制效果

Fig. 5 Control the effect under changes in the amplitude of the secondary paths

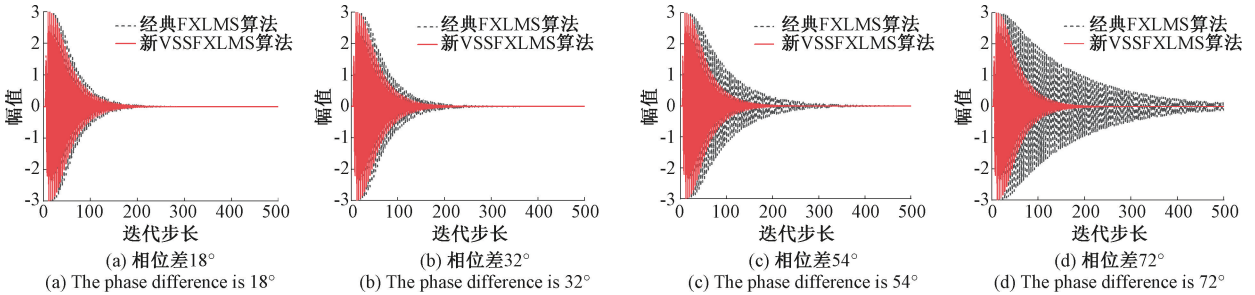
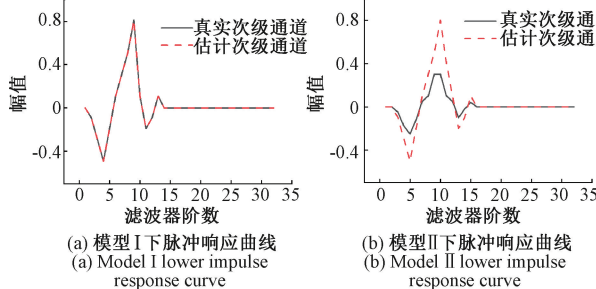


图 6 次级通道相位变化下控制效果

Fig. 6 Control the effect under the phase change of the secondary paths

速度的稳定性。通过结果分析,发现新算法均在迭代 200 次后完全收敛,而经典 FXLMS 会存在收敛过快和过慢的现象。

为进一步验证本文算法,保持  $\hat{s}(n)$  不变,改变  $s(n)$  的幅



值和相位,次级通道及次级通道估计的脉冲响应曲线如图 7 所示,图 7(a)中表示  $s(n)$  和  $\hat{s}(n)$  基本一致,图 7(b)~(d)表示  $s(n)$  和  $\hat{s}(n)$  幅值相位均存在不同程度偏差。

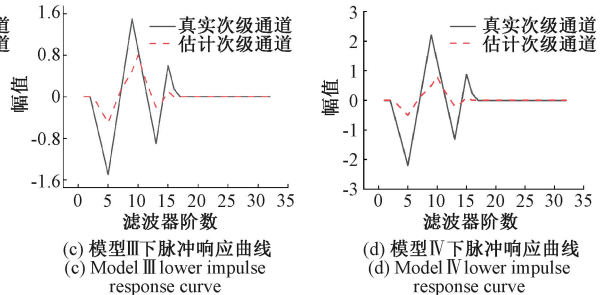


图 7 不同次级通道及次级通道估计的脉冲响应曲线

Fig. 7 Impulse response curves for different secondary channels and their estimated secondary paths

表 1 给出了经典 FXLMS 算法不同次级通道下的参数信息,包括阶数、 $s(n)$  和  $\hat{s}(n)$  情况分析以及收敛性情况分析。

表 1 不同次级通道参数信息

次级通道	阶数	情况分析	经典 FXLMS 算法收敛性分析
模型 I	32	$s(n)^T \hat{s}(n) \approx \ s(n)\ ^2$	收敛
模型 II	32	$s(n)^T \hat{s}(n) > \ s(n)\ ^2$	收敛速度过慢
模型 III	32	$s(n)^T \hat{s}(n) < \ s(n)\ ^2$	收敛速度过快
模型 IV	32	$s(n)^T \hat{s}(n) < \ s(n)\ ^2$	系统发散

图 8 给出了不同次级通道下主动控制效果。当  $s(n)$  未发生变化,两种算法控制效果一致,如图 8(a)所示,因此只给出一种算法的主动控制效果图。由图 8(b)可知,当

$\hat{s}(n)$  未发生变化,  $s(n)$  变小时,本文提出的算法在次级通道发生变化后,迭代 200 次收敛,而经典 FXLMS 算法还未完全收敛。这是由于步长上界变大,经典 FXLMS 算法收敛速度变慢。分析图 8(c)可知,当  $\hat{s}(n)$  未发生变化,  $s(n)$  变大时,新算法在收敛过程中是逐步减少,但经典 FXLMS 算法则经历了一个先降低、随后升高、最终再次降低的动态过程。该现象可归因于步长上限的减小,导致在固定步长策略下,经典 FXLMS 算法的收敛速度过快,这一波动增加了算法的稳态误差。由图 8(d)可知,当  $\hat{s}(n)$  未发生变化,  $s(n)$  继续变大时,采用经典 FXLMS 算法,系统将不会收敛,这是因为算法步长上限大幅度减小,采用的固定步长超过步长上界。综合上述分析,针对次级通道在幅值、相位及一般性突变情形下,本文提出的算法展现出卓越的收敛性能,均在 200 次迭代内达到收敛。相较之下,经典 FXLMS 算法可能出现收敛迟缓或系统不稳定的现象。

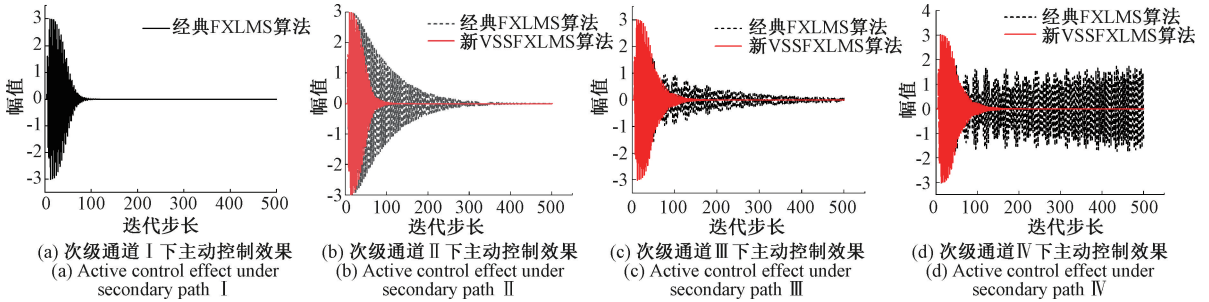


图 8 不同次级通道下两种算法主动振动控制

Fig. 8 Active vibration control of two algorithms under different secondary paths

3.2 不同变步长算法比较

本节将本文算法和最近学者提出的变步长算法进行比较,通过将这几种算法运用到模型 II、模型 III、模型 IV 三种不同次级通道,通过比较不同算法的均方误差来分析不

同变步长算法的优势。

表 2 列举了几种经典变步长算法并给出变步长的计算复杂度。与其余变步长算法相比,本文算法中没有涉及调节变步长参数,只是在求矩阵  $\mathbf{Y}(n)$  和向量  $\mathbf{Y}'(n)$  有一定计算量。

表 2 不同变步长算法复杂度

Table 2 The complexity of the variable step size algorithm

算法名称	表达式	参数个数	加法	减法	乘法	除法
文献[17]	$\mu(n) = \chi [1 - \exp(-\alpha  e(n) ^\beta)]$	$\alpha, \beta, \chi$	0	1	$\beta + 2$	0
文献[18]	$\mu(n) = \beta \operatorname{artan}(\alpha  e(n)  \lambda)$	$\alpha, \beta, \gamma$	0	0	3	0
文献[19]	$\mu(n) = \frac{\beta \lg(\alpha  e(n) ^\chi)}{\lambda + \mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)}$ $\mu(n+1) = \epsilon \mu(n) + \eta(n)e^2(n)$	$\alpha, \beta, \chi, \gamma$	$L$	0	$L + \chi + 2$	1
文献[20]	$\eta(n) = \alpha \operatorname{arccot}(\sum_{i=0}^{L-1}  e(n-i) )$	$\alpha, \epsilon$	$L$	0	4	0
本文算法	$\mu(n) = \mu_1 \frac{(\mathbf{Y}^{-1}(n)\mathbf{Y}'(n))^T \hat{s}(n)}{\ \mathbf{Y}^{-1}(n)\mathbf{Y}'(n)\ ^2}$	0	$(L+1)^2$	0	$L^2 + L - 2$	1

由图 9 可知,各算法展现出各自的特性优势。文献[17]中的算法在次级通道变动较小的情况下,相较于其他算

法,展现出较快的收敛速度和较低的稳态误差,但在次级通道发生较大变动时,其性能表现有所下降。文献[18]中

的算法在次级通道减小时,其收敛误差表现不佳。文献[19]中的算法初始收敛阶段具有较快的收敛速度,但其不足在于稳态误差较大。文献[20]中的算法在次级通道

变化较小时,收敛速率较慢且稳态误差较大。综合比较各算法的收敛性能,本研究提出的算法在收敛速度和稳态误差方面均表现出最优性能。

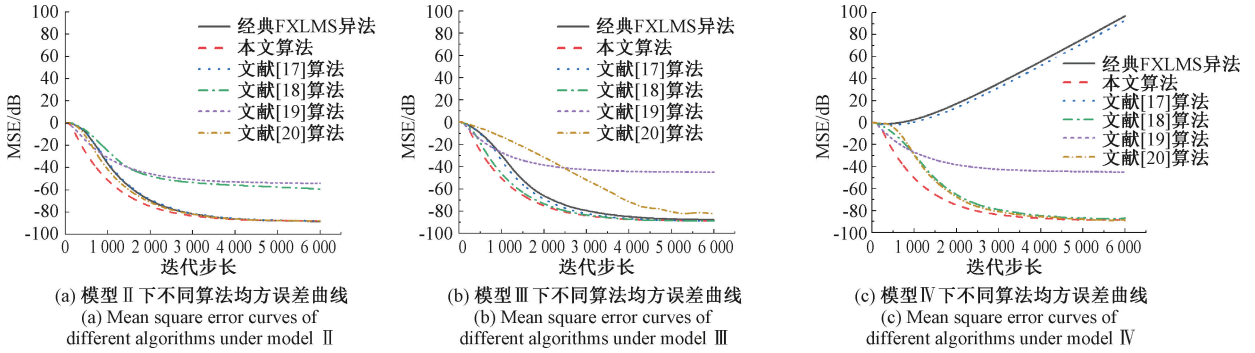


图 9 不同次级通道下各种变步长算法均方误差曲线

Fig. 9 Mean square error curves of various variable step size algorithms under different secondary paths

### 3.3 真实信号验证

为进一步验证新算法的实用性,以实测悬臂梁的脉冲响应信号作为次级通道,实验数据选用一组测得的冲击响应数据。实验中采样点数为 8 192,采用频率为 1 kHz,得到的一组脉冲响应信号设置为次级通道 A 和次级通道 B,如图 10 所示,用 512 阶 FIR 滤波器来表示。

给定频率为 10 Hz,幅值为 0.12 正弦信号和方差为 0.3 的宽频白噪声的叠加信号作为干扰信号,用新算法和经典 FXLMS 实现控制,比较两种算法的实际控制效果。

在初始阶段,次级通道配置为 A,于 5 s 时启动算法,至 15 s 时次级通道发生突变至 B。图 11(a)展示了新型算法的整体控制效果,观察结果表明,在次级通道突变瞬间,算法保持了快速的收敛速率。图 11(b)描绘了新型算法的均方误差(MSE)变化,控制算法激活后,MSE 从 -20 dB 降至 -47 dB。在 15 s 次级通道突变后,MSE 短暂上升至 -35 dB,随后再次降至 -47 dB。对比之下,图 11(c)展示了经典 FXLMS 算法的控制效果,与本文研究算法不同,在 15 s 次级通道突变后,经典 FXLMS 算法导致振动幅值急剧增加并持续上升,为清晰观察突变前后的振动幅值变化,分析时长限定为 16 s。经典 FXLMS 算法的 MSE 在 15 s 后从 -47 dB 骤升至 -23 dB,表明次级通道变化后,放大了干扰信号。总体而言,系统突变后,在本文提出的新算法下振动强度降低 12 dB,而经典 FXLMS 算法下振动强度却增加了 24 dB,证实了本文新算法在次级通道变化情况下仍保持卓越的主动控制性能。

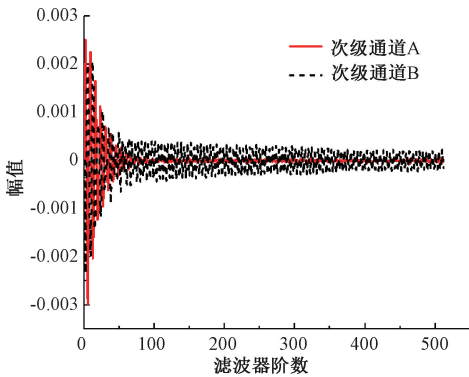
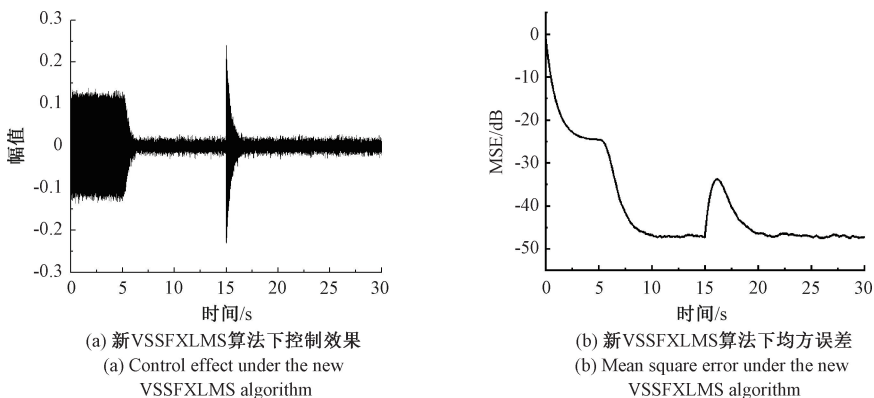


图 10 不同次级通道单位脉冲响应图

Fig. 10 Unit impulse responses of different secondary paths



(a) 新VSSFXLMS算法下控制效果  
(a) Control effect under the new VSSFXLMS algorithm

(b) 新VSSFXLMS算法下均方误差  
(b) Mean square error under the new VSSFXLMS algorithm

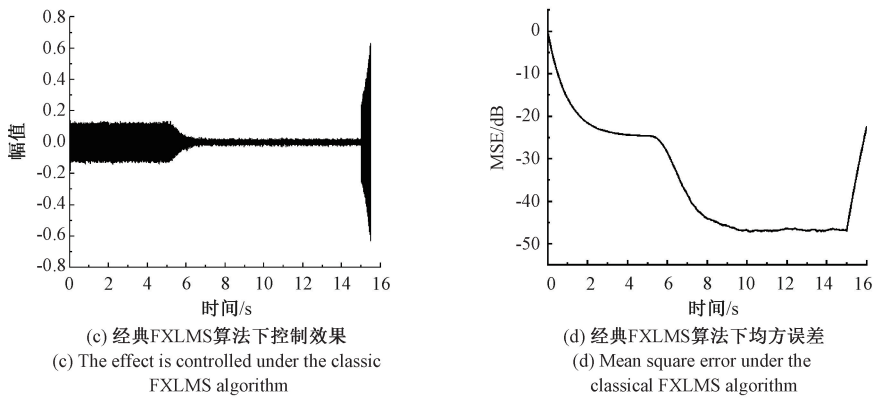


图 11 主动控制效果及均方误差图

Fig. 11 Active control effect and mean square error

## 4 结 论

本文提出了一种新变步长 FXLMS 算法,算法核心在于建立最优步长与步长上界之间的相关性,通过解析步长上界参数来确定最优步长,并基于影响步长上界的因素间接调整最优步长,实现步长的自适应调节。仿真实验对比了本文算法、经典 FXLMS 及其余变步长算法,证实了本算法在次级通道突变条件下具有较快的收敛速度和最低的稳态误差。实际次级通道数据测试进一步证实了本文算法的强自适应性。相较于其他基于基本函数的变步长方法,本文算法从步长影响因素出发,为 FXLMS 算法的步长调整提供了新的研究路径。在实际应用中,固定步长一般小于最佳收敛步长,利用本文算法不能保证最佳收敛速度,但能很好兼顾收敛速度和稳态误差。

需要说明的是本研究仅考虑了次级通道突变,未来研究应扩展至初级通道变化的影响。在次级通道大幅突变情况下,尽管本算法可能无法完全解决经典 FXLMS 算法引起的系统不稳定性,但能显著降低不稳定程度,此时次级通道的重新辨识成为必要。

## 参考文献

[1] 闫宏生,施麟,李佳勇,等. 反馈有源噪声控制的最近邻多频陷波器模型[J]. 电子测量技术, 2022, 45(22): 47-54.  
YAN H SH, SHI L, LI J Y, et al. Nearest neighbours-multifrequency notch filter model for noise feedback active control [J]. Electronic Measurement Technology, 2022, 45(22): 47-54.

[2] 卢炽华,孙孟雷,刘志恩,等. 主动冲击噪声控制自适应算法综述及综合性能分析[J]. 机械工程学报, 2022, 58(13): 101-118.  
LU CH H, SUN M L, LIU ZH EN, et al. Review and performance analysis of adaptive algorithms for active impulsive noise control [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(13): 101-118.

[3] 袁军,李军,孟祥胜,等. 压缩机噪声的主动噪声控制系统研究[J]. 电子测量技术, 2022, 45(4): 33-38.  
YUAN J, LI J, MENG X SH, et al. Research on active noise control system of compressor noise [J]. Electronic Measurement Technology, 2022, 45(4): 33-38.

[4] 刘宁宇,孙跃东,王岩松,等. 汽车发动机噪声主动控制系统实验研究[J]. 汽车工程, 2022, 44(3): 442-448.  
LIU N N, SUN Y D, WANG Y S, et al. An experimental study on active noise control system of automotive engine [J]. Automotive Engineering, 2022, 44(3): 442-448.

[5] 徐金石,杨立东. 基于多窗谱减和 LMS 在工厂中的去噪实现[J]. 电子测量技术, 2021, 44(24): 66-71.  
XU J SH, YANG L D. Implementation of denoising in factory based on multi-window spectral subtraction and LMS [J]. Electronic Measurement Technology, 2021, 44(24): 66-71.

[6] LI W G, WANG W, LI B, et al. Error signal differential term feedback enhanced variable step size fxlms algorithm for piezoelectric active vibration control [J]. Shock and Vibration, 2020: 1-10, DOI: 10.1155/2020/8832467.

[7] 任晓敏,李东新. 基于多速率 LMS 算法的语音自适应滤波器[J]. 国外电子测量技术, 2018, 37(9): 68-73.  
REN X M, LI D X. Adaptive filtering for speech based on multi-rate LMS algorithm [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2018, 37(9): 68-73.

[8] 刘学广,谭鉴,吴牧云,等. 基于镜像修正 FxLMS 控制算法的船舶管路振动主动控制[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2024, 45(1): 77-84.  
LIU X G, TAN J, WU M Y, et al. Active control of ship pipeline vibration based on mirror-modified

- FxLMS control algorithm [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2024, 45(1): 77-84.
- [9] ZHAO T, LIANG J B, ZOU L, et al. A new fxlms algorithm with offline and online secondary-path modeling scheme for active noise control of power transformers [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(8): 6432-6442.
- [10] NIU W CH, ZOU CH ZH, LI B, et al. Adaptive vibration suppression of time-varying structures with enhanced FxLMS algorithm [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 118:93-107.
- [11] 浦玉学,张方,姜金辉,等.基于次级通道在线辨识新算法的振动主动控制[J].振动.测试与诊断,2016,36(1):28-35.  
PU Y X, ZHANG F, JIANG J H, et al. Active vibration control with a new online secondary path modeling method [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(1): 28-35.
- [12] YANG F R, GUO J F, YANG J. Stochastic analysis of the filtered-x LMS algorithm for active noise control [J]. IEEE/ACM Transactions on Audio Speech and Language Processing, 2020, 28: 2252-2266.
- [13] 李梁,虞先国,李怀良,等.一种改进的自适应滤波算法在微震信号处理中的实现[J].中国测试,2015,41(1):97-99,119.  
LI L, TUO X G, LI H L, et al. Realization of improved adaptive filter in seismic signal processing [J]. China Measurement & Test, 2015, 41(1): 97-99,119.
- [14] 张红梅,韩万刚.一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法研究及其应用[J].仪器仪表学报,2015,36(8):1822-1830.  
ZHANG H M, HAN W G. A new variable step LMS algorithm and its application [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2015, 36(8): 1822-1830.
- [15] LIU F, MILLS K J, DONG M, et al. Active broadband sound quality control algorithm with accurate predefined sound pressure level [J]. Applied Acoustics, 2017, 119: 78-87.
- [16] 李晓龙,卢焯华,魏晓旭,等.误差非线性函数的变步长 FxLMS 算法研究 [J]. 声学技术, 2021, 40(3): 398-407.  
LI X L, LU ZH H, WEI X X, et al. Research on variable step size FxLMS algorithm based on error nonlinear function [J]. Technical Acoustics, 2021, 40(3): 398-407.
- [17] 王平波,马凯,武彩.基于正态分布曲线的分段式变步长 LMS 算法 [J]. 国防科技大学学报, 2020, 42(5): 16-22.  
WANG P B, MA K, WU C. Segmented variable-step-size LMS algorithm based on normal distribution curve [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2020, 42(5): 16-22.
- [18] 火元莲,安娅琦,巩琪,等.基于反双曲正切函数的变步长 LMS 算法 [J]. 北京理工大学学报, 2022, 42(10): 1051-1058.  
HUO Y L, AN Y Q, GONG Q, et al. Variable stepsize lms algorithm based on inverse hyperbolic tangent function [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2022, 42(10): 1051-1058.
- [19] 明乐,周峰.基于对数函数的归一化变步长 LMS 算法 [J]. 火力与指挥控制, 2018, 43(8): 173-175,180.  
MING L, ZHOU F. Normalization variable step size lms algorithm based on logarithmic function [J]. Fire Control & Command Control, 2018, 43(8): 173-175, 180.
- [20] 朱晓锦,方昱斌,胡佳明,等.压电柔性梁振动变步长 Fx-LMS 控制算法分析与验证 [J]. 振动.测试与诊断, 2020, 40(2): 215-221,414.  
ZHU X J, FANG Y B, HU J M, et al. Analysis and validation of the active vibration control of flexible piezoelectric beam with Fx-VSSLMS algorithms [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020, 40(2): 215-221,414.

### 作者简介

谢炎江,硕士研究生,主要研究方向为振动与噪声控制。

E-mail: 1256624291@qq.com

原霞(通信作者),副教授,硕士生导师,主要研究方向为振动与噪声控制、滑动轴承技术研究。

E-mail: yuanxia761220@163.com

刘锋,博士,高级工程师,主要研究方向为有源噪声控制、振动与噪声测试及控制。

E-mail: liuf@coinv.com

王玉帅,博士,讲师,主要研究方向为汽车主动噪声控制算法研究、振动与噪声测试及控制。

E-mail: wangys@nuc.edu.cn

樊文欣,教授,硕士生导师,主要研究方向为振动与噪声控制、滑动轴承技术研究。

E-mail: fanwx@nuc.edu.cn